

ANALIZA FUNKCJONALNA

WPPT 3r., sem. letni
LISTA 12

Wrocław, 19 maja 2011

ZADANIE 1. Zidentyfikuj przestrzenie sprzężone do c (ciągi zbieżne) i c_0 (ciągi zbieżne do zera) (obie z normą supremum).

ZADANIE 2. Udowodnij, że $(L^p([0, 1]))^*$ jest izometrycznie izomorficzna z $L^q([0, 1])$. Zrób to dla $p > 1$ oraz dla $p = 1$ (wtedy $q = \infty$). To samo dla przestrzeni na \mathbb{R} w miejsce $[0, 1]$.

Wskazówka: Pracujemy tylko z funkcjonalami nieujemnymi. Miarę zdefiniuje się prosto, bo funkcje charakterystyczne zbiorów ograniczonych są w L^p . Następnie z Tw. Radona-Nikodyma wykazać, że miary te mają gęstości. Wreszcie, żeby pokazać, że taka gęstość należy do L^q trzeba zastosować trick analogiczny jak dla ciągów.

ZADANIE 3. Niech H i H' oznaczają przestrzenie Hilberta. Operator (liniowy ciągły) $T : H \rightarrow H'$ nazywa się *unitarny*, jeśli jest surjekcją i zachowuje iloczyn skalarny: $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$. Oczywiście jest on wtedy izometrią.

(a) Wykaż, że warunek zachowywania iloczynu skalarnego jest równoważny zachowywaniu normy (czyli bycia izometrią).

(b) Pokaż, że w przestrzeniach skończenie-wymiarowych o jednakowym wymiarze surjektywność już wynika dla izometrii.

(c) Podaj przykład zachowującego normę operatora z ℓ^2 w ℓ^2 , który nie jest surjekcją.

ZADANIE 4. Przypominam definicję operatora sprzężonego: Jeśli $T : V \rightarrow W$ to $T^* : W^* \rightarrow V^*$ jest zadany wzorem $T^*(y^*)(x) = y^*(Tx)$ (czyli $\langle x|T^*(y^*) \rangle = \langle Tx|y^* \rangle$). Udowodnij, że jeśli V jest refleksywna to $\|T^*\| = \|T\|$. Czy jest to prawda bez refleksywności?

ZADANIE 5. Niech $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Zdefiniujmy operator $T_\phi : \ell^p \rightarrow \ell^p$ wzorem

$$T_\phi(x) = (y), \text{ gdzie } x = (x_n), y = (y_{\phi(n)}).$$

(a) Udowodnij, że T_ϕ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ "skleja" (daje ten sam obraz) co najwyżej pewnej ograniczonej liczbie punktów.

(b) T_ϕ jest odpowiednio surjekcją lub injekcją wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ jest injekcją lub surjekcją (na krzyż).

(c) Jeśli ϕ jest bijekcją to T_ϕ jest izometrią (sprawdź, co o normach wynika z tego, że ϕ jest tylko injekcją lub tylko surjekcją).

Tomasz Downarowicz